РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

„Обични диференцијални равенки“ (ОДР)

- содржат еден или повеќе изводи од непозната функција

Диференцијална равенка	Решение
$x' - x = e^t$	$x(t) = (t + \mathrm{C}) \cdot e^t$
$x' + t \cdot x^2 = 0$	$x(t) = \dfrac{2}{t^2 + 2 \cdot \mathrm{C}}$
$x' + \dfrac{1}{2 \cdot x} = 0$	$x(t) = \pm\sqrt{\mathrm{C} - t}$

Аналитичко решение со помош на Symbolic Math Toolbox

```
>> x=dsolve('Dx=exp(t) + x')
x =
(t+C1)*exp(t)
>> x=dsolve('Dx=-1./(2*x)')
x =
   (-t+C1)^(1/2)
  -(-t+C1)^(1/2)
>> x=dsolve('Dx=-t*x^2')
x =
2/(t^2+2*C1)
```


РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

„Обични диференцијални равенки“

- Константите се определуваат од почетните услови

$$x' = f\left(t, x(t)\right)$$

$$x_a = x(a)$$

Диференцијална равенка	Почетен услов	Решение
$x' = x + 1$	$x(0) = 0$	$x(t) = e^t - 1$
$x' = 6t - 1$	$x(1) = 6$	$x(t) = 3t^2 - t + 4$
$x' = \dfrac{t}{x + 1}$	$x(0) = 0$	$x(t) = \sqrt{t^2 + 1} - 1$

Аналитичко решение со помош на Symbolic Math Toolbox

```
>> x=dsolve('Dx=x+1','x(0)=0')
x =
-1+exp(t)
>> x=dsolve('Dx=6*t-1','x(1)=6')
x =
3*t^2-t+4
>> x=dsolve('Dx=t/(x+1)','x(0)=0')
x =
-1+(1+t^2)^(1/2)
>>
```

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Аналитичко решение

$$x' = 6t - 1$$
$$x(1) = 6$$
$$x(t) = 3t^2 - t + \mathrm{C}$$
$$x(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 + \mathrm{C}=6$$
$$\mathrm{C}=4$$
$$x(t) = 3t^2 - t + 4$$

$$x' = 3t^2 - \frac{4}{t} + \frac{1}{1+t^2}$$
$$x(5) = 17$$
$$x(t) = t^3 - 4\ln t + \operatorname{atan} t + \mathrm{C}$$
$$x(5) = 5^3 - 4\ln 5 + \operatorname{atan} 5 + \mathrm{C}=17$$
$$\mathrm{C}=17 - (5^3 - 4\ln 5 + \operatorname{atan} 5) = -115.8112$$
$$x(t) = t^3 - 4\ln t + \operatorname{atan} t - 115.8112$$

$$x' = e^{-\sqrt{t^2 - \sin t}} + \ln\left|\sin t + \tanh t^3\right|$$

$$x(t) = ?$$

```
>> Dx='Dx=exp( -sqrt(t^2-sin(t)) ) + log(abs(sin(t) + tanh(t^3)))';
>> x=dsolve(Dx)
x =
Int(exp(-(t^2-sin(t))^(1/2))+log(abs((sin(t)*cosh(t^3)+sinh(t^3))/cosh(t^3))),t)+C1
```


РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Методи базирани на Тејлоров ред

- ако се познати првите *m* изводи на функцијата $x(t)$, таа може приближно да се изрази со првите *n* членови од Тејлоровиот ред
- метод со Тејлоров ред од *m*–ти ред

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot x'(t) + \frac{\Delta t^2 \cdot x''(t)}{2!} + \frac{\Delta t^3 \cdot x'''(t)}{3!} + \cdots + \frac{\Delta t^n \cdot x^{(n)}(t)}{n!} + \cdots$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i \cdot x^{(i)}(t)}{i!} = x(t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta t^i \cdot x^{(i)}(t)}{i!} + O\left(\Delta t^{m+1}\right)$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta t^i \cdot x^{(i)}(t)}{i!}$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Ојлеров метод (Euler)

- Метод со Тејлоров ред 1

$$x' = f\left(t, x(t)\right)$$

$$x_a = x(a)$$

$$x(b) = ?$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta t^i \cdot x^{(i)}(t)}{i!}$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \frac{\Delta t \cdot x'(t)}{1!}$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \Delta x \cdot x'(t)$$

$$t_0 = a;\ t_n = b;\ \Delta t = \frac{b-a}{n}$$

$$a < b \rightarrow \Delta t > 0$$

$$a > b \rightarrow \Delta t < 0$$

$$x(t_i) \approx x(t_{i-1}) + \Delta t \cdot f\left(t_{i-1}, x(t_{i-1})\right)$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1 Со помош на Ојлеровиот метод да се реши следната диференцијална равенка за t=2 со чекор Δt=0.01

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$

$$x_a = x(1) = -4$$

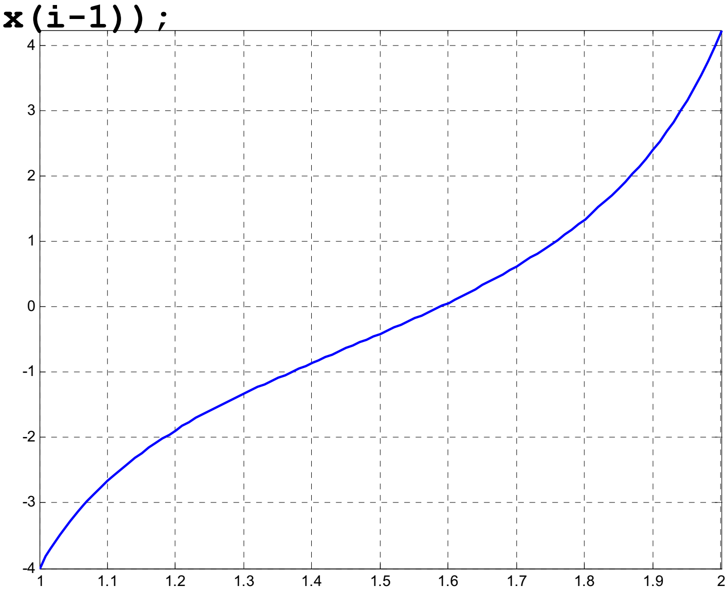
$$x(b) = x(2) = ?$$

```
>> n=100;
>> euler(1,2,n,-4);
xb =
   4.23586369443282
>>
```

```
function euler(a,b,n,xa)
format 'long'
dt = (b - a) / n;
t(1) = a; x(1) = xa;
for i = 2:n+1
  x(i) = x(i-1) + dt * F(t(i-1),x(i-1));
  t(i) = t(i-1) + dt;
end
xb = x(n+1)

clf;hold on; grid on; box on;
tmin=min(t);tmax=max(t);
xmin = min(x); xmax = max(x);
plot(t,x,'b-','linewidth',2)
axis([tmin tmax xmin xmax])

function F=F(t,x)
F = t^3 + x^2 + 1;
```



РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2 $x' = 6t - 1$

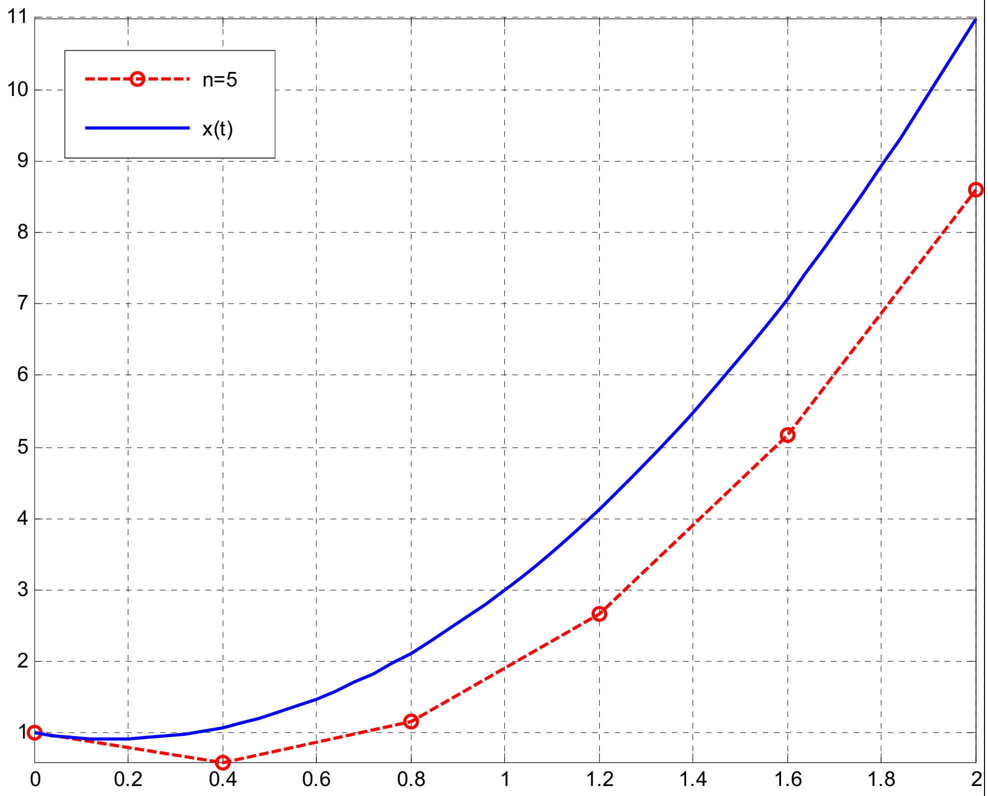
$x(t) = 3t^2 - t + 1 \quad x(2) = 11$

$x' = 6t - 1$

$x_a = x(0) = 1$

$x(b) = x(2) = ?$

```
>> n=5;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
   8.60000
>>
```



РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2 $x' = 6t - 1$

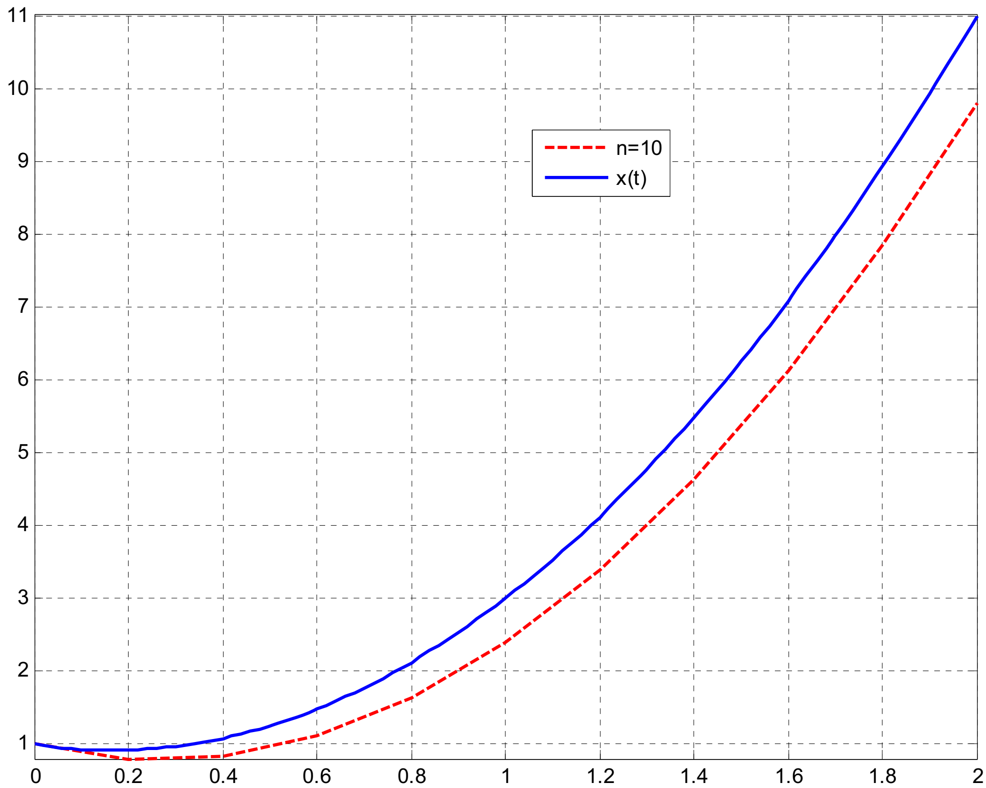
$x(t) = 3t^2 - t + 1 \quad x(2) = 11$

$x' = 6t - 1$

$x_a = x(0) = 1$

$x(b) = x(2) = ?$

```
>> n=10;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
   9.800000
>>
```



РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

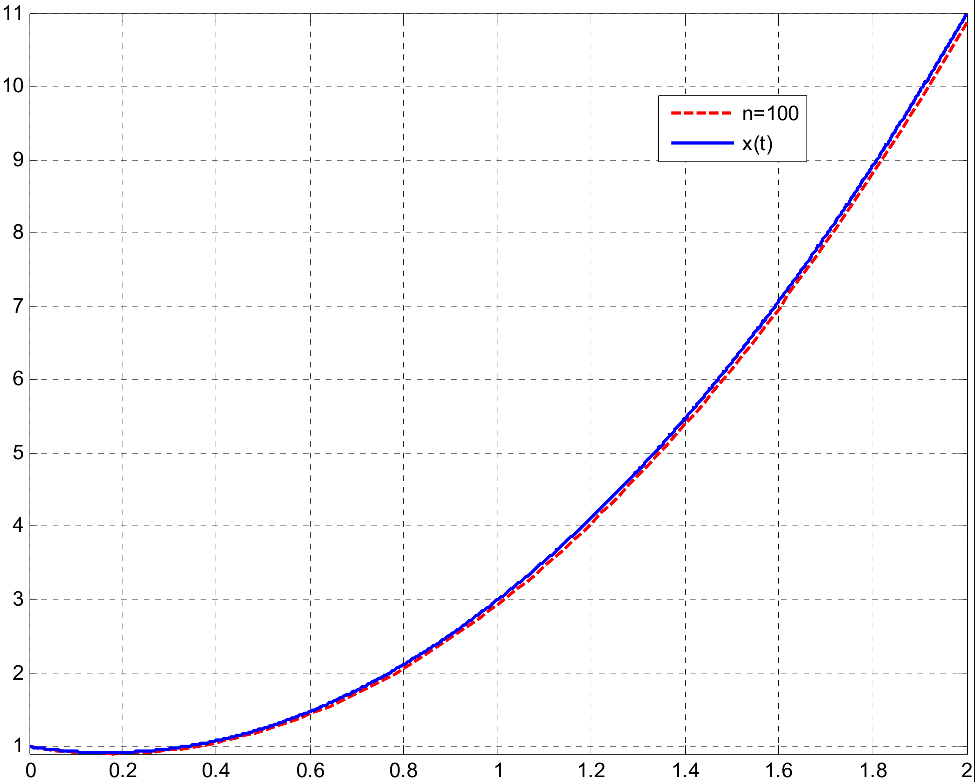
Пример 5.2 $x' = 6t - 1$ $x(t) = 3t^2 - t + 1 \quad x(2) = 11$

$$x' = 6t - 1$$

$$x_a = x(0) = 1$$

$$x(b) = x(2) = ?$$

```
>> n=100;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
  10.88000000000001
>>
>> n=1000;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
  10.98800000000001
>> n=10000;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
  10.99879999999904
```



РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1Да се реши следната диференцијална равенка со Тејлоров ред од 4. ред

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$

$$x_a = x(1) = -4$$

$$x(b) = x(2) = ?$$

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \sum_{i=1}^{4} \frac{\Delta t^i \cdot x^{(i)}(t)}{i!}$$

$$x(t_i) \approx x(t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{4} \frac{\Delta t^i \cdot x^{(i)}(t_{i-1})}{i!}$$

$$x(t_i) \approx x(t_{i-1}) + \Delta t \cdot \left\{ x' + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[x'' + \frac{\Delta t}{3} \cdot \left(x''' + \frac{\Delta t}{4} \cdot x^{(4)} \right) \right] \right\}$$

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$

$$x'' = 3t^2 + 2 \cdot x \cdot x'$$

$$x''' = 6t + 2 \cdot x' \cdot x' + 2 \cdot x \cdot x''$$

$$x^{(4)} = 6 + 6 \cdot x'' \cdot x' + 2 \cdot x \cdot x'''$$

```
>> x=dsolve('Dx=t^3 + x^2 + 1')
Warning: Explicit solution could not be found.
> In dsolve at 330
x =
[ empty sym ]
```

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1Да се реши следната диференцијална равенка со Тејлоров ред од 4. ред

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$
$$x_a = x(1) = -4$$
$$x(b) = x(2) = ?$$

$$x(t_i) \approx x(t_{i-1}) + \Delta t \cdot \left\{ x' + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[x'' + \frac{\Delta t}{3} \cdot \left(x''' + \frac{\Delta t}{4} \cdot x^{(4)} \right) \right] \right\}$$

```
>> taylor_m(1,2,100,-4)
x(2)=4.3712100522497
```

```
>> euler(1,2,100,-4);
x(2)=4.23586369443282
```

```
function taylor_m(a,b,n,xa)
format 'long'
dt = (b - a) / n;
t = a;
x = xa;
for i = 2:n+1
  x1 = t^3 + x^2 + 1;
  x2 = 3*t^2 + 2*x*x1;
  x3 = 6*t + 2 * x1^2 + 2 * x * x2;
  x4 = 6 + 6 * x1 * x2 + 2 * x * x3;
  x = x + dt * (x1 + (dt/2) * (x2 + (dt/3)*(x3 + (dt/4)*x4)));
  t = a + (i - 1) * dt;
end
output = strcat('x(', num2str(t),')=', num2str(x,14));
disp(string)
```


РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Методи Рунге-Кута

- Рунге-Кута од втор ред

$$x' = f(t, x(t))$$
$$x_a = x(a)$$
$$x(b) = ?$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \left(\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 \cdot f(x,y)$$

$$\left(\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 \cdot f(x,y) = f$$

$$\left(\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 \cdot f(x,y) = \Delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\left(\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \cdot f(x,y) = \Delta x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \Delta y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Методи Рунге-Кута

- Рунге-Кута од втор ред

$$x' = f\left(t, x(t)\right)$$
$$x_a = x(a)$$
$$x(b) = ?$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + w_1 \cdot F_1 + w_2 \cdot F_2$$
$$F_1 = \Delta t \cdot f(t, x)$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f(t + \alpha \cdot \Delta t, x + \beta \cdot F_1)$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{\Delta x}{2} \cdot f(t, x) + \frac{\Delta x}{2} \cdot f\left(t + \Delta t, x + \Delta x \cdot f(t, x)\right)$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t, x)$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f(t + \Delta t, x + F_1)$$

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f\left[t_{i-1}, x(t_{i-1})\right]$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f(t_i, x + F_1)$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Методи Рунге-Кута

- Рунге-Кута од четврт ред

$$x' = f\left(t, x(t)\right)$$
$$x_a = x(a)$$
$$x(b) = ?$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t, x)$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{1}{2} \cdot F_1\right)$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{1}{2} \cdot F_2\right)$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t + \Delta t, x + F_3)$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.3 Да се реши следната диференцијална равенка со помош на методот на Рунге-Кута од четврт ред со 72 чекора

$$x' = (x - t - 1)^2 + 2$$
$$x(1) = 2$$
$$x(1.5625) = ?$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t, x)$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{1}{2} \cdot F_1\right)$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{1}{2} \cdot F_2\right)$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t + \Delta t, x + \cdot F_3)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$

```
function rungekuta4(a,b,n,xa)
format 'long'
dt = (b - a) / n; t = a; x = xa;
for i = 2:n+1
  f1 = dt * F(t,x);
  f2 = dt * F(t + dt/2.,x + f1/2.);
  f3 = dt * F(t + dt/2.,x + f2/2.);
  f4 = dt * F(t + dt,x + f3);
  x = x + (f1 + 2*(f2+f3) + f4)/6.;
  t = a + (i-1) * dt;
end
output = strcat(' n=', num2str(n), '; x(', num2str(t),')=', num2str(x,15));
disp(output)

function F=F(t,x)
F = (x - t - 1) ^ 2 + 2;
```


РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.3

$$x' = (x - t - 1)^2 + 2$$
$$x(1) = 2$$
$$x(1.5625) = ?$$

$$x(t) = 1 + t + \tan(t - 1)$$

```
>> rungekuta4(1,1.5625,72,2)
 n=72; x(1.5625)=3.19293767383707
>> x=dsolve('Dx=(x-t-1)^2+2','x(1)=2')
x =
t+1+tan(t-1)
>> t=1.5625;
>> x=t+1+tan(t-1)
x =         3.19293767383588
>> rungekuta4(1,1.5625,144,2)
n=144; x(1.5625)=3.19293767383598
```

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Модификации на методот на Рунге-Кута

- грешката може да се оцени ако ОДР се реши два пати со n и $2n$ чекора

$$\frac{\left|x_{2n}(b)-x_n(b)\right|}{15}\le\varepsilon$$

  – ако не е исполнет претходниот услов, бројот на чекори се зголемува двојно сè додека не се постигне потребната точност ε
- модификација на Фелберг
  – Рунге-Кута од ред 4 и 5

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.4 Да се реши следната диференцијална равенка со помош на методот на Рунге-Кута од четврт ред со точност од 10^{-8}

$$x'=t+x$$

$$x(0)=1$$

$$x(1)=?$$

$$\frac{\left|x_{2n}-x_n\right|}{15}\le\varepsilon$$

```
function rungekuta4a(a,b,n,xa,eps)
format 'long';
err = 1.e6; iter = 0; n = n / 2;
while err > eps
  n = n * 2; iter = iter + 1;
  dt = (b - a) / n; t = a; x = xa;
  for i = 2:n+1
    f1 = dt * F(t,x);
    f2 = dt * F(t + dt/2.,x + f1/2.);
    f3 = dt * F(t + dt/2.,x + f2/2.);
    f4 = dt * F(t + dt,x + f3);
    x = x + (f1 + 2*(f2+f3) + f4)/6.;
    t = a + (i-1) * dt;
  end
  X(iter) = x;
  if iter > 1
    err = abs(X(iter) - X(iter - 1))/15.;
  end
 output = strcat('iter=', num2str(iter), ' n=', num2str(n), ' err=', ...
    num2str(err), ' x(', num2str(t),')=', num2str(x,14));
 disp(output)
end

function F=F(t,x)
F = x + t;
```

```
>> rungekuta4a(0,1,4,1,1e-8)
iter=1; n=4; err=1000000; x(1)=3.43641987840265
iter=2; n=8; err=8.9207e-006; x(1)=3.43655368883347
iter=3; n=16; err=6.2079e-007; x(1)=3.43656300068117
iter=4; n=32; err=4.0943e-008; x(1)=3.43656361482239
iter=5; n=64; err=2.6287e-009; x(1)=3.43656365425265
```

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Метод на Рунге-Кута-Фелберг

$$x' = f\left(t, x(t)\right)$$
$$x_a = x(a)$$
$$x(b) = ?$$

$$X_4 = x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{25}{216}F_1 + \frac{1408}{2565}F_3 + \frac{2197}{4104}F_4 - \frac{1}{5}F_5$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t, x)$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{\Delta t}{4}, x + \frac{1}{4}\cdot F_1\right)$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{3}{8}\Delta t, x + \frac{3}{32}F_1 + \frac{9}{32}F_2\right)$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{12}{13}\Delta t, x + \frac{1932}{2197}F_1 - \frac{7200}{2197}F_2 + \frac{7296}{2197}F_3\right)$$
$$F_5 = \Delta t \cdot f\left(t + \Delta t, x + \frac{439}{216}F_1 - 8\cdot F_2 + \frac{3680}{513}F_3 - \frac{845}{4104}F_4\right)$$
$$F_6 = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, x - \frac{8}{27}F_1 + 2\cdot F_2 - \frac{3544}{2565}F_3 + \frac{1859}{4104} - \frac{1}{40}F_5\right)$$

$$\varepsilon = \left|X_4 - X_5\right|$$

$$X_5 = x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{16}{135}F_1 + \frac{6656}{12825}F_3 + \frac{28561}{56430}F_4 - \frac{9}{50}F_5 + \frac{2}{55}F_6$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.3 Да се реши следната диференцијална равенка со помош на методот на Рунге-Кута користејќи ги вградените функции во MatLab со точност 10^{-10}

$$x' = (x - t - 1)^2 + 2$$
$$x(1) = 2$$
$$x(1.5625) = ?$$

```
function xb=ode(a,b,xa,eps)
format 'long'
options = odeset('RelTol',eps);
[t,x] = ode45(@F,[a, b],xa,options);
n=length(x);
xb = x(n);
output = strcat('x(', num2str(b),')=', num2str(xb,15));
disp(output)
clf; hold on; grid on; box on;
tmin = min(t);tmax = max(t);
xmin = min(x); xmax = max(x);
plot(t,x,'b-','linewidth',2)
axis([tmin tmax xmin xmax])

function F = F(t,x)
m = 1;
F = zeros(m,1); %column vector
F(1) = (x - t - 1) ^ 2 + 2;
```

```
>> xb=ode(1,1.5625,2,1e-10);
x(1.5625)=3.19293767372997
```

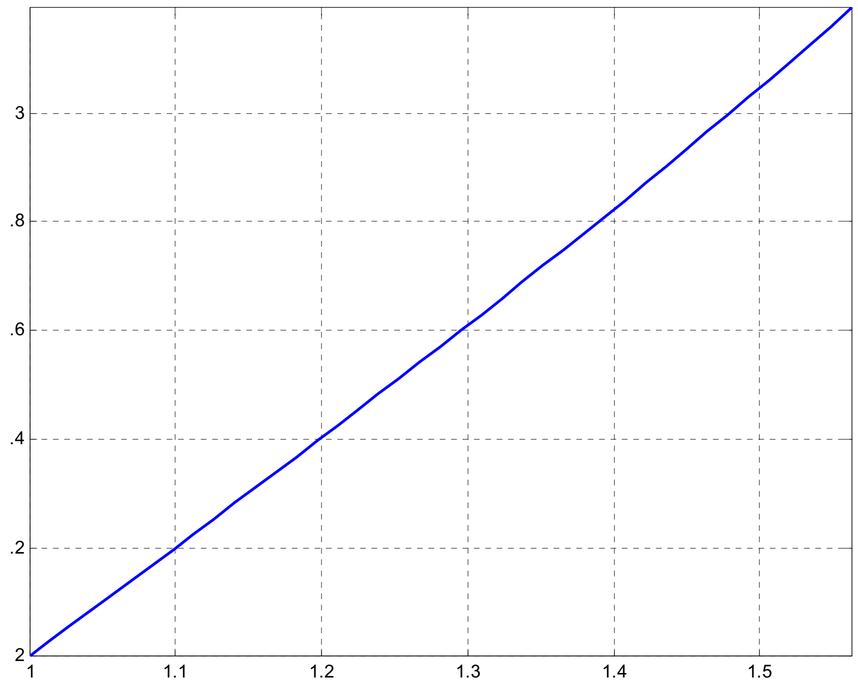
РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.3

$$x' = (x - t - 1)^2 + 2$$

$$x(1) = 2$$

$$x(1.5625) = ?$$



РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.4 Да се реши следната диференцијална равенка со помош на методот на Рунге-Кута користејќи ги вградените функции во MatLab со точност 10^{-8}

$$x' = x + t$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = ?$$

```
function xb=ode(a,b,xa,eps)
format 'long'
options = odeset('RelTol',eps);
[t,x] = ode45(@F,[a, b],xa,options);
n=length(x);
xb = x(n);
output = strcat('x(', num2str(b),')=', num2str(xb,15));
disp(output)

function F = F(t,x)
m = 1;
F = zeros(m,1); %column vector
F(1)  = x + t;
```

```
>> xb=ode(0,1,1,1e-8);
x(1)=3.43656366959418
```

```
>> rungekuta4a(0,1,4,1,1e-8)
iter=5; n=64; err=2.6287e-009; x(1)=3.43656365425265
```

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Метод на Милн

$$x' = f(t,x) = x - t$$
$$x(a) = x_a$$
$$x(b) = ?$$

- метод со „прогноза-корекција“ (predictor-corector)

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}$$

$$a = t_0 \le t = t_0 + i\cdot\Delta t \le b = t_0 + n\cdot\Delta t;\ i = 0,1,\cdots,n$$

$$x_{k+1}^{pred} = x_{k-3} + \frac{4\cdot\Delta t}{3}\left(2\cdot x'_{k-2} - x'_{k-1} + 2\cdot x'_k\right)$$

$$x_{k+1}^{pred} = x_{k-3} + \frac{4\cdot\Delta t}{3}\left[2\cdot f\left(t_{k-2},x_{k-2}\right) - f\left(t_{k-1,}x_{k-1}\right) + 2\cdot f\left(t_k,x_k\right)\right]$$

$$x'_{k+1} = f\left(t_{k+1},x_{k+1}^{pred}\right)$$

$$x_{k+1}^{cor} = x_{k-1} + \frac{\Delta t}{3}\left(x'_{k-1} + 4\cdot x'_k + x'_{k+1}\right)$$

$$x_{k+1}^{cor} = x_{k-1} + \frac{\Delta t}{3}\left[f\left(t_{k-1},x_{k-1}\right) + 4\cdot f\left(t_{k,}x_k\right) + f\left(t_{k+1},x_{k+1}^{pred}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{k+1}^{cor} \approx \frac{1}{29}\left|x_{k+1}^{cor} - x_{k+1}^{pred}\right|$$

$$\varepsilon_{k+1}^{cor} \le \varepsilon \rightarrow x_{k+1} = x_{k+1}^{cor}$$

$$\varepsilon_{k+1}^{cor} > \varepsilon \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t}{2};\ k = 0$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Метод на Милн

- пресметка на функцијата $x(t)$ во точките t_0, t_1 и t_2 според некои од методите со приближувања
  - Ојлер, Рунге-Кута од четврт ред и сл.
- пресметка на „прогнозата“

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k-3} + \frac{4\cdot\Delta t}{3}\left(2\cdot x'_{k-2} - x'_{k-1} + 2\cdot x'_k\right)$$

- пресметка на „корекцијата“

$$x'_{k+1} = f\left(t_{k+1},\tilde{x}_{k+1}\right)$$

$$x_{k+1}^{cor} = x_{k-1} + \frac{\Delta t}{3}\left(x'_{k-1} + 4\cdot x'_k + x'_{k+1}\right)$$

- проценка на грешката

$$\varepsilon_{k+1}^{cor} \approx \frac{1}{29}\left|x_{k+1}^{cor} - \tilde{x}_{k+1}\right|$$

- ако грешката е помала од бараната точност се продлжува со пресметката во следниот чекор

$$x_{k+1} = x_{k+1}^{cor}$$

- ако грешката е поголема од бараната точност се намалува Δt и се процесот започнува одново со првиот чекор

$$\varepsilon_{k+1}^{cor} > \varepsilon \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t}{2};\ k = 0$$

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Системи од независни диференцијални равенки (uncoupled)

$$x'(t) = x + 2t - t^2 - t^3 \qquad x(0) = 1$$

$$y'(t) = y - 4t^2 + t^3 \qquad y(0) = 0$$

```
>> x=dsolve('Dx=x+2*t-t^2-t^3','x(0)=1')
x =
t^3+4*t^2+6*t+6-5*exp(t)
```

$$x(t) = t^3 + 4t^2 + 6t + 6 - 5e^t$$

```
>> [y]=dsolve('Dy=y-4*t^2+t^3','y(0)=0')
y =
t^2+2*t+2-t^3-2*exp(t)
```

$$y(t) = t^2 + 2t + 2 - 2e^t$$

```
>> [x,y]=dsolve('Dx=x+2*t-t^2-t^3','Dy=y-4*t^2+t^3','x(0)=1','y(0)=0')
x =
t^3+4*t^2+6*t+6-5*exp(t)
y =
t^2+2*t+2-t^3-2*exp(t)
```


СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Системи зависни диференцијални равенки (coupled)

$$x'(t) = x - y + 2t - t^2 - t^3 \qquad x(0) = 1$$

$$y'(t) = x + y - 4t^2 + t^3 \qquad y(0) = 0$$

```
>> x=dsolve('Dx=x+y+2*t-t^2-t^3','x(0)=1')
x =
t^3+4*t^2+6*t+6+y+exp(t)*(y-5)
>> [y]=dsolve('Dy=x+y-4*t^2+t^3','y(0)=0')
y =
-x+t^2+2*t+2-t^3+exp(t)*(x-2)
```

$$x(t) = t^3 + 4t^2 + 6t + 6 + y + 5e^t \cdot (y - 5)$$

$$y(t) = -x + t^2 + 2t + 2 - t^3 - e^t \cdot (x - 2)$$

```
>>[x,y]=dsolve('Dx=x-y+2*t-t^2-t^3','Dy=x+y-4*t^2+t^3','x(0)=1','y(0)=0')
x =
exp(t)*cos(t)+t^2
y =
exp(t)*sin(t)-t^3
```

$$x(t) = e^t \cdot \cos t + t^2$$

$$y(t) = e^t \cdot \sin t - t^3$$

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Системи диференцијални равенки (СДР)

$$x'(t) = x - y + 2t - t^2 - t^3 \qquad x(0) = 1$$

$$y'(t) = x + y - 4t^2 + t^3 \qquad y(0) = 0$$

$$x_0 = t;\ x_1 = x;\ x_2 = y$$

$$x_0' = 1 \qquad x_0(0) = 0$$

$$x_1' = x_1 - x_2 + 2x_0 - x_0^2 - x_0^3 \qquad x_1(0) = 1$$

$$x_2' = x_1 + x_2 - 4x_0^2 + x_0^3 \qquad x_2(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_0 - x_0^2 - x_0^3 \\ x_1 + x_2 - 4x_0^2 + x_0^3 \end{bmatrix}$$

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Систем од n диференцијални равенки се трансформира во систем од n+1 равенка

- СДР без присуство на независната променлива t се нарекува „автономен“ систем

$$x_0' = f_0(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n)$$

$$x_1' = f_1(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n)$$

$$x_2' = f_2(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n' = f_n(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n)$$

$$x_0(a) = s_0,\ x_1(a) = s_1,\ x_2(a) = s_2, \cdots,\ x_n(a) = s_n$$

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Метод Рунге-Кута од четврти ред за СДР

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t) = \boldsymbol{X} + \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{F}_1 + 2\cdot\boldsymbol{F}_2 + 2\cdot\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4\right)$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\cdot\Delta t\cdot\boldsymbol{F}_1\right)$$

$$\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\cdot\Delta t\cdot\boldsymbol{F}_2\right)$$

$$\boldsymbol{F}_4 = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X} + \Delta t\cdot\boldsymbol{F}_3\right)$$

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.5 Со помош на методот Рунге-Кута од четврти ред да се реши следниот СДР

$$x'(t) = x - y + 2t - t^2 - t^3$$

$$y'(t) = x + y - 4t^2 + t^3$$

$$x(0) = 1$$

$$y(0) = 0$$

$$x_0' = 1$$

$$x_1' = x_1 - x_2 + 2x_0 - x_0^2 - x_0^3$$

$$x_2' = x_1 + x_2 - 4x_0^2 + x_0^2$$

$$x_0(0) = 0$$

$$x_1(0) = 1$$

$$x_2(0) = 0$$

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{S}$$

```
>> X=rk4_sys(0,1,Xa,100);
 k=100; x(1)=2.46869394070231; y(1)=1.28735528747857
```

```
>>[x,y]=dsolve('Dx=x-y+2*t-t^2-t^3','Dy=x+y-4*t^2+t^3','x(0)=1','y(0)=0')
x=exp(t)*cos(t)+t^2
y=exp(t)*sin(t)-t^3

>> x(1)=exp(t)*cos(t)+t^2
x(1)=2.46869393991589

>> y(1)=exp(t)*sin(t)-t^3
y(1)=1.28735528717884
```

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

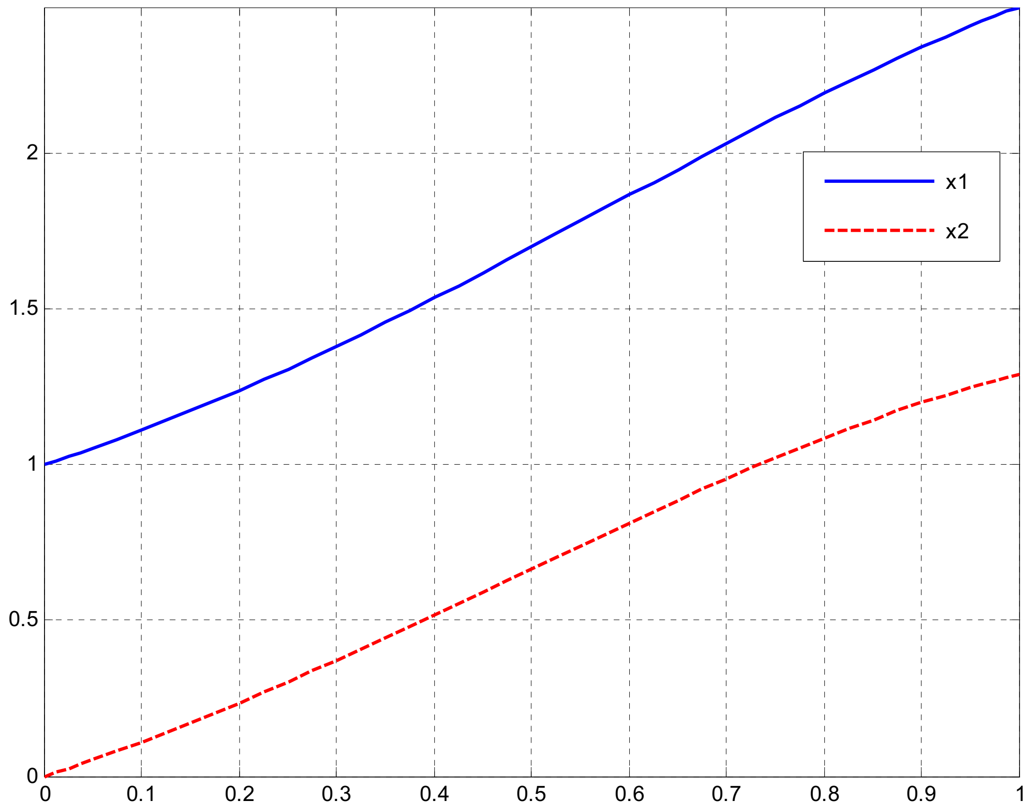
```
function [X] = rk4_sys(a,b,Xa,ncekori)
format 'long'
X = Xa;
n = length(Xa); dt = (b - a) / ncekori;
for k = 1:ncekori
  F(:,1) = xp_sys(X);
  for i=1:n
    Y(i) = X(i) + 0.5 * dt * F(i,1);
  end
  F(:,2) = xp_sys(Y);
  for i=1:n
    Y(i) = X(i) + 0.5 * dt * F(i,2);
  end
  F(:,3) = xp_sys(Y);
  for i=1:n
    Y(i) = X(i) + dt * F(i,3);
  end
  F(:,4) = xp_sys(Y);
  for i=1:n
    X(i) = X(i) + dt * (F(i,1) + 2 * F(i,2) + 2 * F(i,3) + F(i,4)) / 6.;
  end
end
output = strcat(' k=', num2str(k), '; x(', num2str(X(1)),')=', ...
  num2str(X(2),15), '; y(', num2str(X(1)),')=', num2str(X(3),15));
disp(output)

function F = xp_sys(X)
  F(1) = 1; % t'=1;
  F(2) = X(2) - X(3) + 2*X(1) - X(1)^2 - X(1)^3; %x'=x - y + 2t - t^2 - t^3
  F(3) = X(2) + X(3) - 4*X(1)^2 + X(1)^3; % y'=x + y - 4t^2 + t^3
```


СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.5

```
>> Xa=[1, 0];
>> ode(0,1,Xa,1.e-6);
 x1(1)=2.46869393702453 x2(1)=1.28735527646651
```



СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

```
function xb=ode(a,b,Xa,eps)
format 'long'
options = odeset('RelTol',eps);
[t,x] = ode45(@F,[a,b],Xa,options);
[n,m]=size(x); output = '';
for i = 1:m;
  output = strcat(output,' x',num2str(i),'(',num2str(b),')=',num2str(x(n,i),15));
end
disp(output)

clf;
hold on; grid on; box on;
line_pat = {'b-', 'r--'};
tmin=min(t);tmax=max(t); xmin = 1.e6; xmax=-1.e6;
for i=1:m
  xmin = min(xmin,min(x(:,i)));
  xmax = max(xmax,max(x(:,i)));
  aa(i) = cellstr(strcat('x', num2str(i)));
  plot(t,x(:,i),char(line_pat(i)),'linewidth',2)
end
[legend_h,object_h,plot_h,text_strings] = legend(aa);
axis([tmin tmax xmin xmax])

function F = F(t,x)
m = 2;
F = zeros(m,1);     % column vector
F(1) = x(1) - x(2) + 2*t - t^2 - t^3;
F(2) = x(1) + x(2) -4*t^2 + t^3;
```


ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', x''', \cdots, x^{(n-1)}\right)$$

$$x(a) = x_a,\ x'(a) = x'_a,\ x''(a) = x''_a, \cdots,\ x^{(n-1)}(a) = x_a^{(n-1)}$$

$$x''(t) = -3\cos^2 t + 2$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

```
>> x=dsolve('D2x=-3*cos(t)^2+2')
x =
3/4*cos(t)^2+1/4*t^2+C1*t+C2
>> x=dsolve('D2x=-3*cos(t)^2+2','x(0)=0','Dx(0)=0')
x =
3/4*cos(t)^2+1/4*t^2-3/4
```

$$x(t) = \frac{3}{4}\cos^2 t + \frac{t^2}{4} - \frac{3}{4}$$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

Диференцијалните равенки од повисок ред може да се претворат во СДР од прв ред

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', x''', \cdots, x^{(n-1)}\right)$$

$$x(a) = x_a,\ x'(a) = x'_a,\ x''(a) = x''_a, \cdots,\ x^{(n-1)}(a) = x_a^{(n-1)}$$

Стара променлива	Нова променлива	Почетна вредност	Диференцијална равенка
t	x_0	$x_0(a)$	$x'_0 = 1$
x	x_1	$x_1(a)$	$x'_1 = x_2$
x'	x_2	$x_2(a)$	$x'_2 = x_3$
x''	x_3	$x_3(a)$	$x'_3 = x_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x^{(n-1)}$	x_n	$x_n(a)$	$x'_n = f\left(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

Диференцијалните равенки од повисок ред може да се претворат во СДР од прв ред

Стара променлива	Нова променлива	Почетна вредност	Диференцијална равенка
t	x_0	$x_0(a)$	$x'_0 = 1$
x	x_1	$x_1(a)$	$x'_1 = x_2$
x'	x_2	$x_2(a)$	$x'_2 = x_3$
x''	x_3	$x_3(a)$	$x'_3 = x_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x^{(n-1)}$	x_n	$x_n(a)$	$x'_n = f\left(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$

$$\begin{aligned}
x'_0 &= f_0\left(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n\right) \\
x'_1 &= f_1\left(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n\right) \\
x'_2 &= f_2\left(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n\right) \\
&\vdots \\
x'_n &= f_n\left(x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n\right) \\
x_0(a) &= s_0,\ x_1(a) = s_1,\ x_2(a) = s_2, \cdots,\ x_n(a) = s_n
\end{aligned}$$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

Пример 5.6

$$x''' = \cos x + \sin x' - e^{x''} + t^2$$
$$x(0) = 3,\ x'(0) = 7,\ x''(0) = 13$$

Стара променлива	Нова променлива	Почетна вредност	Диференцијална равенка
t	x_0	$a = x_0(0) = 0$	$x_0' = 1$
x	x_1	$x(0) = x_1(0) = 3$	$x_1' = x_2$
x'	x_2	$x'(0) = x_2(0) = 7$	$x_2' = x_3$
x''	x_3	$x''(0) = x_3(0) = 13$	$x_3' = \cos x_1 + \sin x_2 - e^{x_3} + x_0^2$

```
>> x=dsolve('D3x=cos(x)+sin(Dx)-exp(D2x)+t^2')
Warning: Explicit solution could not be found.
```


ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

```
function [X] = rk4_sys(sys,a,b,Xa,ncekori)
format 'long'
X = Xa;
n = length(Xa);
dt = (b - a) / ncekori;
for k = 1:ncekori
  F(:,1) = xp_sys(X);
  for i=1:n
    Y(i) = X(i) + 0.5 * dt * F(i,1);
  end
  F(:,2) = xp_sys(Y);
  for i=1:n
    Y(i) = X(i) + 0.5 * dt * F(i,2);
  end
  F(:,3) = xp_sys(Y);
  for i=1:n
    Y(i) = X(i) + dt * F(i,3);
  end
  F(:,4) = xp_sys(Y);
  for i=1:n
    X(i) = X(i) + dt * (F(i,1) + 2 * F(i,2) + 2 * F(i,3) + F(i,4)) / 6.;
  end
end
output = strcat(' k=', num2str(k));
for i = 1:n
  if sys == lower('da') | i <=2
    output = strcat(output, '; x', num2str(i), '(', num2str(X(1)),')=', ...
      num2str(X(i),15));
  end; end; disp(output)
```

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

Пример 5.6

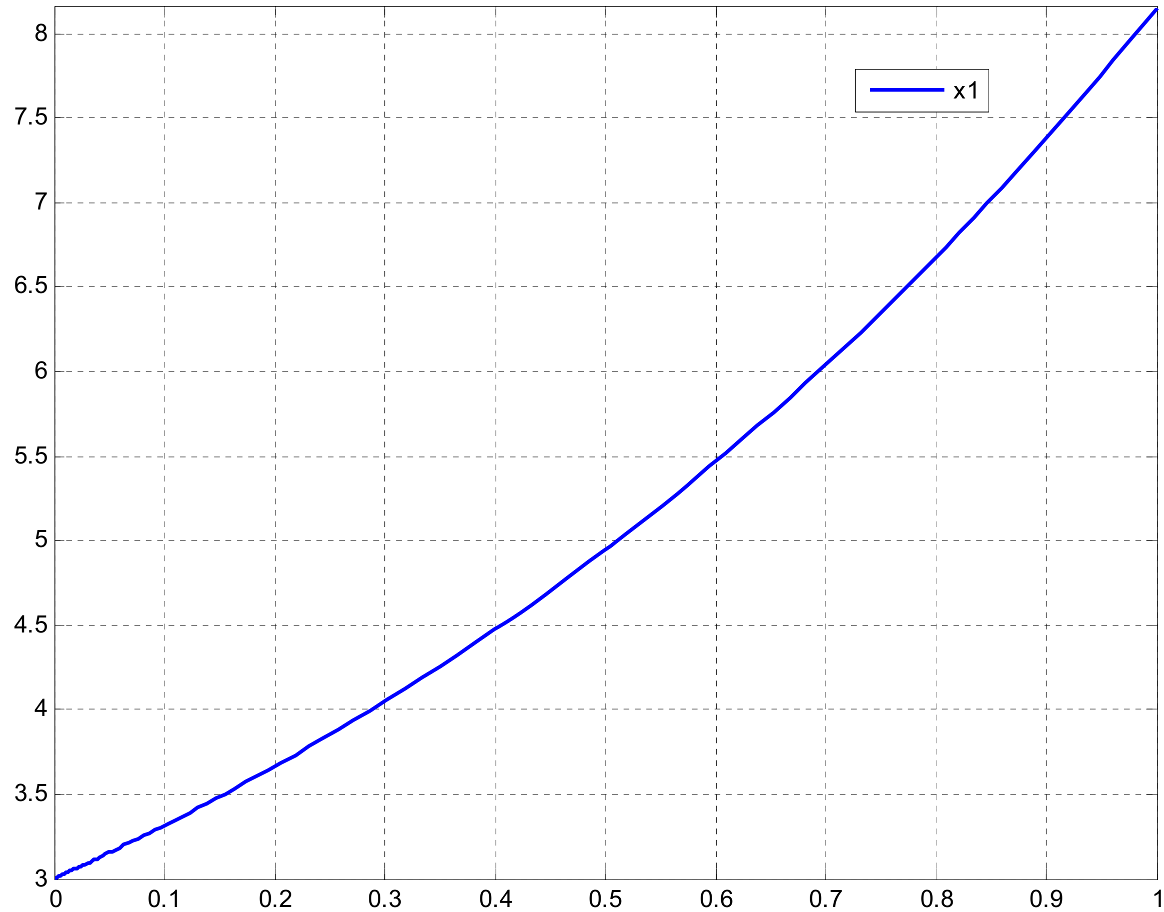
```
function F = xp_sys(X)
  F(1) = 1; % t'=1;
  F(2) = X(2);
  F(3) = X(3);
  F(4) = cos(X(2)) + sin(X(3)) - exp(X(4)) + X(1)^2;
```

```
>> Xa=[0,3,7,13];
>> rk4_sys('ne',0,1,Xa,100);
 k=100; x1=1; x2(1)=8.15484548470321
```

```
>> Xa = [3,7,13];
>> ode('ne',0,1,Xa,1e-6);
ode45; b=1 x1(b)=8.15484548676119
```


ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

Пример 5.6



СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{S}$$

Метод Адамс-Башфорт-Мултон

- метод базиран на принципот „прогноза-корекција“
- овозможува проценка на грешката и поради тоа чекорот на пресметките може да се прилагоди соодветно
- се користи методот на Рунге-Кута за пресметка на функциите во првите 3 чекора (t_1, t_2 и t_3)

$$\Delta t = \frac{b-a}{m}$$

$$a = t_0 \le t = t_0 + i \cdot \Delta t \le b = t_0 + m \cdot \Delta t;\ i = 0,1,\cdots,m$$

Формула на Адамс-Башфорт

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t+\Delta t) = \boldsymbol{X}(t) + \frac{\Delta t}{24} \cdot \left\{55 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t)\right] - 59 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-\Delta t)\right] + 37 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-2\cdot\Delta t)\right] - 9 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-3\cdot\Delta t)\right]\right\}$$

Формула на Адамс-Мултон

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t) = \boldsymbol{X}(t) + \frac{\Delta t}{24} \cdot \left\{9 \cdot \boldsymbol{F}\left[\tilde{\boldsymbol{X}}(t+\Delta t)\right] + 19 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t)\right] - 5 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-\Delta t)\right] + \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-2\cdot\Delta t)\right]\right\}$$

$$\varepsilon_i = \frac{19}{270} \cdot \frac{x_i - \tilde{x}_i}{x_i},\ i = 1,2,\cdots,n \qquad \varepsilon = \max_{i=1,\cdots n} |\varepsilon_i|$$

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{S}$$

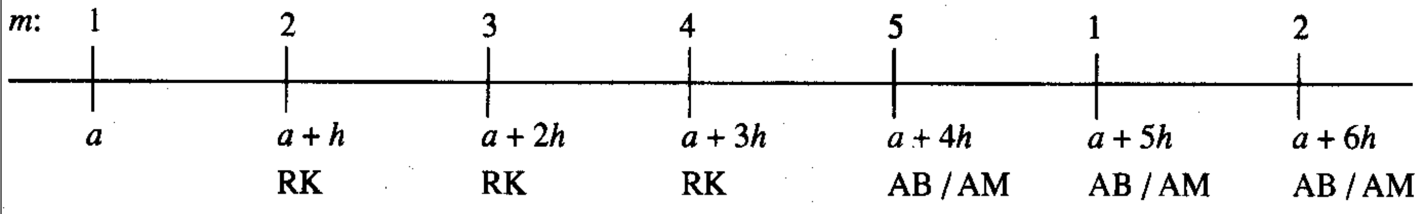
Метод Адамс-Башфорт-Мултон

$$\Delta t = \frac{b-a}{m}$$

$$a = t_0,\ t_1 = t_0 + \Delta t,\ t_2 = t_0 + 2\cdot\Delta t,\ t_3 = t_0 + 3\cdot\Delta t,\cdots,t_i = t_0 + i\cdot\Delta t,\cdots,b = t_0 + m\cdot\Delta t$$

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t+\Delta t) = \boldsymbol{X}(t) + \frac{\Delta t}{24} \cdot \left\{55 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t)\right] - 59 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-\Delta t)\right] + 37 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-2\cdot\Delta t)\right] - 9 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-3\cdot\Delta t)\right]\right\}$$

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t) = \boldsymbol{X}(t) + \frac{\Delta t}{24} \cdot \left\{9 \cdot \boldsymbol{F}\left[\tilde{\boldsymbol{X}}(t+\Delta t)\right] + 19 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t)\right] - 5 \cdot \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-\Delta t)\right] + \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{X}(t-2\cdot\Delta t)\right]\right\}$$



РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1 Да се пресмета $x(2)$. Диференцијална равенка да се реши со Ојлеровиот метод, земајќи дека Δt=0.25

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$
$$x' = F(t,x)$$
$$x_a = x(1) = -4$$
$$x(b) = x(2) = ?$$

```
>> euler(1,2,100000,-4);
x(2)=4.37107
```

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{2-1}{0.25} = 4$$

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot x'(t_i)$$

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot F\left[t_i, x(t_i)\right]$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot F\left[t_i, x(t_i)\right]$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot F\left[t_i, x(t_i)\right]$$

$$x(1.25) = x(t_1) = x(t_0) + \Delta t \cdot F\left[t_0, x(t_0)\right] = x(1) + \Delta t \cdot F\left[1, x(1)\right]$$
$$= -4 + 0.25 \cdot \left[1^3 + (-4)^2 + 1\right] = -4 + 0.25 \cdot 14 = 0.5$$

$$x(1.5) = x(t_2) = x(t_1) + \Delta t \cdot F\left[t_1, x(t_1)\right] = x(1.25) + \Delta t \cdot F\left[1.25, x(1.25)\right]$$
$$= 0.5 + 0.25 \cdot \left[(1.25)^3 + (0.5)^2 + 1\right] = 1.30078$$

$$x(1.75) = x(t_3) = x(t_2) + \Delta t \cdot F\left[t_2, x(t_2)\right] = x(1.5) + \Delta t \cdot F\left[1.5, x(1.5)\right]$$
$$= 1.30078 + 0.25 \cdot \left[(1.5)^3 + (1.30078)^2 + 1\right] = 2.81754$$

$$x(2) = x(t_4) = x(t_3) + \Delta t \cdot F\left[t_3, x(t_3)\right] = x(1.75) + \Delta t \cdot F\left[1.75, x(1.75)\right]$$
$$= 2.81754 + 0.25 \cdot \left[(1.75)^3 + (2.81754)^2 + 1\right] = 6.39201$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2 Да се пресмета $x(2)$. Диференцијална равенка да се реши со Ојлеровиот метод, земајќи дека Δt=0.5

$$x' = 6t - 1$$

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot x'(t_i)$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot x'(t_i)$$

$$x' = 6t - 1$$

$$x_a = x(t_0) = x(0) = 1$$

$$x(b) = x(t_n) = x(2) = ?$$

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{2-0}{0.5} = 4$$

```
>> n=100;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
  10.88000000000001
>>
>> n=1000;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
  10.98800000000001
>> n=10000;
>> euler(0,2,n,1);
xb =
  10.99879999999904
```


РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2

$$x' = 6t - 1$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot x'(t_i)$$

$$x(0.5) = x(t_1) = x(t_0) + \Delta t \cdot x'(t_0) = x(0) + \Delta t \cdot x'(0) = 1 + 0.5 \cdot (6 \cdot 0 - 1) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$x(1) = x(t_2) = x(t_1) + \Delta t \cdot x'(t_1) = x(0.5) + \Delta t \cdot x'(0.5) = 0.5 + 0.5 \cdot (6 \cdot 0.5 - 1) = 1 + 1 = 1.5$$

$$x(1.5) = x(t_3) = x(t_2) + \Delta t \cdot x'(t_2) = x(1) + \Delta t \cdot x'(1) = 1.5 + 0.5 \cdot (6 \cdot 1 - 1) = 1.5 + 2.5 = 4$$

$$x(2) = x(t_4) = x(t_3) + \Delta t \cdot x'(t_3) = x(1.5) + \Delta t \cdot x'(1.5) = 4 + 0.5 \cdot (6 \cdot 1.5 - 1) = 4 + 4 = 8$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1 Да се пресмета $x(2)$. Диференцијална равенка да се реши со методот Рунге-Кута од 4. ред, земајќи дека Δt=0.25

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$
$$x_a = x(1) = -4$$
$$x(b) = x(2) = ?$$

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{2-1}{0.25} = 4$$

$$x' = f(t, x(t))$$
$$x_a = x(a)$$
$$x(b) = ?$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \frac{1}{6}(F_1 + 2\cdot F_2 + 2\cdot F_3 + F_4)$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i)$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{1}{2}\cdot F_1\right)$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{1}{2}\cdot F_2\right)$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3)$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1

$$t_{i+1} = t_1 = 1.25$$
$$t_i = t_0 = 1$$

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$
$$x_a = x(1) = -4$$
$$x(b) = x(2) = ?$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.25 \cdot \left[1^3 + (-4)^2 + 1\right] = 4.5$$

$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.125^3 + \left(-4 + \frac{4.5}{2}\right)^2 + 1\right] = 1.37158$$

$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.125^3 + \left(-4 + \frac{1.37158}{2}\right)^2 + 1\right] = 3.35195$$

$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.25 \cdot \left[1.25^3 + (-4 + 3.35195)^2 + 1\right] = 0.843273$$

$$x(t_1) = x(1.25) = x(1) + \frac{1}{6}(F_1 + 2\cdot F_2 + 2\cdot F_3 + F_4)$$
$$= -4 + \frac{1}{6}\cdot(4.5 + 2\cdot 1.37158 + 3\cdot 3.35195 + 0.843273) = -1.53494$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$

$$x_a = x(1) = -4$$

$$x(b) = x(2) = ?$$

$$t_{i+1} = t_2 = 1.5$$

$$t_i = t_1 = 1.25$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.25 \cdot \left[1.25^3 + (-1.53494)^2 + 1\right] = 1.32729$$

$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.375^3 + \left(-1.53494 + \frac{1.32729}{2}\right)^2 + 1\right] = 1.08969$$

$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.375^3 + \left(-1.53494 + \frac{1.08969}{2}\right)^2 + 1\right] = 1.14498$$

$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.25 \cdot \left[1.5^3 + (-1.53494 + 1.14498)^2 + 1\right] = 1.13177$$

$$x(t_2) = x(1.5) = x(1.25) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$

$$= -1.53494 + \frac{1}{6} \cdot (1.32729 + 2 \cdot 1.08969 + 2 \cdot 1.14498 + 1.13177) = -0.38021$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$

$$x_a = x(1) = -4$$

$$x(b) = x(2) = ?$$

$$t_{i+1} = t_3 = 1.75$$

$$t_i = t_2 = 1.5$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.25 \cdot \left[1.5^3 + (-0.38021)^2 + 1\right] = 1.12989$$

$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.625^3 + \left(-0.38021 + \frac{1.12989}{2}\right)^2 + 1\right] = 1.33129$$

$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.625^3 + \left(-0.38021 + \frac{1.33129}{2}\right)^2 + 1\right] = 1.34312$$

$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.25 \cdot \left[1.75^3 + (-0.38021 + 1.34312)^2 + 1\right] = 1.82164$$

$$x(t_3) = x(1.75) = x(1.5) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$

$$= -0.38021 + \frac{1}{6} \cdot (1.12989 + 2 \cdot 1.33129 + 2 \cdot 1.34312 + 1.82164) = 1.00318$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$
$$x_a = x(1) = -4$$
$$x(b) = x(2) = ?$$

$$t_{i+1} = t_4 = 2$$
$$t_i = t_3 = 1.75$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.25 \cdot \left[1.75^3 + (1.00318)^2 + 1\right] = 1.84144$$

$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.875^3 + \left(1.00318 + \frac{1.84144}{2}\right)^2 + 1\right] = 2.8233$$

$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.25 \cdot \left[1.875^3 + \left(1.00318 + \frac{2.8233}{2}\right)^2 + 1\right] = 3.3558$$

$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.25 \cdot \left[2^3 + (1.00318 + 3.3558)^2 + 1\right] = 7.00018$$

$$x(t_4) = x(2) = x(1.75) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$

$$= 1.00318 + \frac{1}{6} \cdot (1.84144 + 2 \cdot 2.8233 + 2 \cdot 3.3558 + 7.00018) = 4.53648$$

$$x(2) = 4.53648$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.1

$$x' = t^3 + x^2 + 1$$
$$x_a = x(1) = -4$$
$$x(b) = x(2) = ?$$

$$x(2) = 4.53648$$

```
>> rungekuta4(1,2,4,-4);
x(2)=4.536482
>> rungekuta4(1,2,100,-4);
x(2)=4.371221
>> rungekuta4(1,2,10000,-4);
x(2)=4.371221
>> rungekuta4a(1,2,4,-4,1e-6)
iter=1; n=4; err=1000000; x(2)=4.53648213673082
iter=2; n=8; err=0.010958; x(2)=4.37210628631868
iter=3; n=16; err=5.9257e-005; x(2)=4.37121743346405
iter=4; n=32; err=4.041e-007; x(2)=4.371223494983
```

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2 Да се пресмета $x(2)$. Диференцијална равенка да се реши со методот Рунге-Кута од 4. ред, земајќи дека Δt=0.5

$$x' = 6t - 1 \qquad \Delta t = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{2-0}{0.5} = 4$$

$$x' = 6t - 1$$
$$x_a = x(t_0) = x(0) = 1$$
$$x(b) = x(t_n) = x(2) = ?$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \frac{1}{6}(F_1 + 2\cdot F_2 + 2\cdot F_3 + F_4)$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i)$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{1}{2}\cdot F_1\right)$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{1}{2}\cdot F_2\right)$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3)$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2

$$t_{i+1} = t_1 = 0.5$$
$$t_i = t_0 = 0$$

$$x' = f(t,x) = 6t - 1$$
$$x_a = x(t_0) = x(0) = 1$$
$$x(b) = x(t_n) = x(2) = ?$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.5\cdot[6\cdot 0 - 1] = -0.5$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.5\cdot[6\cdot 0.25 - 1] = 0.25$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.5\cdot[6\cdot 0.25 - 1] = 0.25$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.5\cdot[6\cdot 0.5 - 1] = 1$$

$$x(t_1) = x(0.5) = x(0) + \frac{1}{6}(F_1 + 2\cdot F_2 + 2\cdot F_3 + F_4)$$
$$= 1 + \frac{1}{6}\cdot(1 + 2\cdot 1.75 + 2\cdot 1.75 + 2.5) = 1.25$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2

$$t_{i+1} = t_2 = 1$$
$$t_i = t_1 = 0.5$$

$$x' = f(t, x) = 6t - 1$$
$$x_a = x(t_0) = x(0) = 1$$
$$x(b) = x(t_n) = x(2) = ?$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.5 \cdot [6 \cdot 0.5 - 1] = 1$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.5 \cdot [6 \cdot 0.75 - 1] = 1.75$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.5 \cdot [6 \cdot 0.75 - 1] = 1.75$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1 - 1] = 2.5$$

$$x(t_2) = x(1) = x(0.5) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$
$$= 1.25 + \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot 1.75 + 2 \cdot 1.75 + 2.5) = 3$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2

$$t_{i+1} = t_3 = 1.5$$
$$t_i = t_2 = 1$$

$$x' = f(t, x) = 6t - 1$$
$$x_a = x(t_0) = x(0) = 1$$
$$x(b) = x(t_n) = x(2) = ?$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1 - 1] = 2.5$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1.25 - 1] = 3.25$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1.25 - 1] = 3.25$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1.5 - 1] = 4$$

$$x(t_3) = x(1.5) = x(1.0) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$
$$= 3 + \frac{1}{6} \cdot (2.5 + 2 \cdot 3.25 + 2 \cdot 3.25 + 4) = 6.25$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2

$$t_{i+1} = t_4 = 2$$
$$t_i = t_3 = 1.5$$

$$x' = f(t,x) = 6t - 1$$
$$x_a = x(t_0) = x(0) = 1$$
$$x(b) = x(t_n) = x(2) = ?$$

$$F_1 = \Delta t \cdot f(t_i, x_i) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1.5 - 1] = 4$$
$$F_2 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1.75 - 1] = 4.75$$
$$F_3 = \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right) = 0.5 \cdot [6 \cdot 1.75 - 1] = 4.75$$
$$F_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + F_3) = 0.5 \cdot [6 \cdot 2 - 1] = 5.5$$

$$x(t_4) = x(2) = x(1.5) + \frac{1}{6}(F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4)$$
$$= 6.25 + \frac{1}{6} \cdot (4+2 \cdot 4.75+2 \cdot 4.75+5.5) = 11$$

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Пример 5.2

$$x(2) = 11$$

$$x' = f(t,x) = 6t - 1$$
$$x_a = x(t_0) = x(0) = 1$$
$$x(b) = x(t_n) = x(2) = ?$$

```
>> rungekuta4(0,2,2,1)
t(i)=0; x(i)=1
t(i)=1; x(i)=3; f1=-1; f2=2; f3=2; f4=5
t(i)=2; x(i)=11; f1=5; f2=8; f3=8; f4=11
t(i)=2; x(i)=11.000000
>> rungekuta4(0,2,4,1)
t(i)=0; x(i)=1
t(i)=0.5; x(i)=1.25; f1=-0.5; f2=0.25; f3=0.25; f4=1
t(i)=1; x(i)=3; f1=1; f2=1.75; f3=1.75; f4=2.5
t(i)=1.5; x(i)=6.25; f1=2.5; f2=3.25; f3=3.25; f4=4
t(i)=2; x(i)=11; f1=4; f2=4.75; f3=4.75; f4=5.5
t(i)=2; x(i)=11.000000
>> rungekuta4a(0,2,2,1,1e-6)
iter=1; n=2; err=1000000; x(2)=11
iter=2; n=4; err=0; x(2)=11
```

РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

```
function rungekuta4(a,b,n,xa)
format 'long'
dt = (b - a) / n; t = a; x = xa;
disp(sprintf('t(i)=%g; x(i)=%g', t, x))
for i = 2:n+1
  f1 = dt * F(t,x);
  f2 = dt * F(t + dt/2.,x + f1/2.);
  f3 = dt * F(t + dt/2.,x + f2/2.);
  f4 = dt * F(t + dt,x + f3);
  x = x + (f1 + 2*(f2+f3) + f4)/6.;
  if n <= 10
    disp(sprintf('t(i)=%g; x(i)=%g; f1=%g; f2=%g; f3=%g; f4=%g',
t+dt, x, f1, f2, f3, f4))
  end
  t = t + dt;
end
disp(sprintf('t(i)=%g; x(i)=%f', t, x))

function F=F(t,x)
F= 6 * t - 1;
```


РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

```
function rungekuta4a(a,b,n,xa,eps)
format 'long'
err = 1.e6; iter = 0; n = n / 2;
while err > eps
  n = n * 2; iter = iter + 1; dt = (b - a) / n; t = a; x = xa;
  for i = 2:n+1
    f1 = dt * F(t,x);
    f2 = dt * F(t + dt/2.,x + f1/2.);
    f3 = dt * F(t + dt/2.,x + f2/2.);
    f4 = dt * F(t + dt,x + f3);
    x = x + (f1 + 2*(f2+f3) + f4)/6.;
    t = t + dt;
  end
  if iter > 1
    err = abs(x1 - x)/15.;
  end
  x1 = x;
disp(sprintf('iter=%d; n=%d; err=%e; t=%g; x=%e',iter,n,err,t,x))
end

function F=F(t,x)
F= 6 * t - 1;
```